NOTE di PROBABILITÀ

Prof.ssa Paola Giacconi

Cenni storici

Possiamo affermare che i primi approcci al concetto di probabilità risalgano a Luca Pacioli (1494), noto anche come Fra Luca dal Borgo, il quale affrontò il problema della *ripartizione della posta in gioco nel caso che un gioco d'azzardo debba essere interrotto anzitempo*. Problema che venne successivamente affrontato anche da Nicolò Tartaglia e risolto da Pascal e Fermat.

I primi studi veri e propri legati alla probabilità sono presenti in *Liber de ludo aleæ* (1526) di Girolamo Cardano pubblicato solo un secolo e mezzo dopo, nel 1663 e in *Sulla scoperta dei dadi* di Galileo Galilei, pubblicato nel 1656, In questi testi gli autori introducono ed usano il concetto di permutazione.

La nascita del concetto moderno di *probabilità* viene attribuita a due grandi scienziati quali erano Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665). Ciò risulta dalla corrispondenza che i due si scambiavano discutendo di un problema legato al gioco d'azzardo: *Se si lanciano più volte due dadi, quanti lanci sono necessari affinché si possa scommettere con vantaggio che esca il doppio sei?*

Nello stesso periodo il fisico Christiaan Huygens (1629-1695) scrive *de ratiociniis in aleæ lugo* nel quale utilizza il concetto di valore atteso e di campionamento statistico con e senza riposizione. I suoi lavori influenzano tra l'altro Pierre de Montmort (1678-1719) che nel 1708 scrive *Essai d'analyse sur le jeux de hasard*, ed anche Jakob Bernoulli e Abraham de Moivre. Pascal annuncia nel 1654 all'Accademia di Parigi che sta lavorando sul problema della ripartizione della messa in gioco. E in una lettera del 29 luglio dello stesso anno a Fermat propone la soluzione del problema affrontato con il metodo per ricorrenza mentre Fermat aveva utilizzato metodi basati sulle combinazioni. Nel 1713 viene pubblicato postumo *Ars conjectandi* di Jakob Bernoulli dove viene formulato il primo teorema limite, ovvero la legge dei grandi numeri.

Solo nel '900, si viene a creare una moderna *teoria della probabilità* grazie soprattutto a Andrey Nikolaevich Kolmogorov che nel 1933 sviluppa la teoria assiomatica in *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* .

Nella prima metà del '900 si imposta anche la teoria soggettivista, la cui formulazione è dovuta a Bruno de Finetti il quale riprede e sviluppa quanto proposto da Leonard Jimmie Savage e Frank Plumpton Ramsey.

Tre definizioni di probabilità

1. Definizione **classica** dovuta Laplace.

   Napoleone: «Lei ha scritto questo librone sulla fondazione del mondo senza menzionare una sola volta l'autore dell'universo»
   Laplace: «Non ho avuto bisogno di questa ipotesi»[1] »
   Pierre-Simon Laplace
   Pierre-Simon Laplace, marchese di Laplace (Beaumont-en-Auge, 23 marzo 1749 – Parigi, 5 marzo 1827), è stato un matematico, fisico e astronomo francese. Fu uno dei principali scienziati nel periodo napoleonico.
   Ha dato fondamentali contribuiti a vari campi della matematica, dell'astronomia e della teoria della probabilità ed è stato uno degli scienziati più influenti al suo tempo, anche per il suo contributo all'affermazione del determinismo. Laplace, infatti, diede la svolta finale all'astronomia matematica riassumendo ed estendendo il lavoro dei suoi predecessori nella sua opera in cinque volumi Mécanique Céleste (1799-1825). Questo capolavoro ha trasformato lo studio geometrico della meccanica sviluppato da Newton in quello basato sull'analisi matematica. Nel 1799 fu nominato ministro degli interni da Napoleone che nel 1806 gli conferì il titolo di conte dell'Impero. Fu nominato marchese nel 1817, dopo la restaurazione dei Borboni.

   Essa si applica ad esperimenti casuali i cui **eventi** elementari si ritengono **equiprobabili**.
   La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli e il numero dei casi possibili, purché questi ultimi siano ugualmente possibili.
   In questo caso si conoscono a priori quanti sono i casi possibili e quanti i casi favorevoli relativi all'evento senza che sia necessario fare alcuna prova.

2. Definizione **frequentista** dovuta a von Mises .

   Richard von Mises (Lemberg, 19 aprile 1883 – Boston, 14 luglio 1953) è stato un matematico, ingegnere e accademico austriaco naturalizzato statunitense.
   Richard von Mises ha dato importanti e pionieristici contributi nel campo della meccanica dei fluidi, della aerodinamica, della aeronautica, della statistica e di teoria della probabilità. Benché più noto per il suo lavoro di matematico e scienziato, egli ha anche contribuito alla filosofia della scienza, seguendo le linee di Ernst Mach: aderì al Circolo di Berlino (strettamente legato a quello di Vienna), e accolse le tesi di fondo del positivismo logico. Insegnò in varie università tedesche e a Berlino. All'avvento del nazismo emigrò prima in Turchia e poi negli Stati Uniti dove, dal 1939, fu professore di matematica applicata e aerodinamica all'Università di Harvard.

   Tale definizione si rende necessaria quando **non** è possibile conoscere a priori il numero di casi favorevoli senza che si effettuino degli esperimenti. Essa poggia sulla legge dei grandi numeri secondo la quale in una successione di prove effettuate nelle **medesime condizioni**, la frequenza di un evento si avvicina alla probabilità dell'evento stesso e l' approssimazione tende a migliorare con l'aumentare delle prove. Si applica ad esperimenti casuali i cui eventi elementari **non** sono ritenuti **ugualmente possibili**, ma l'esperimento è ripetibile più volte sotto le stesse condizioni. ***La probabilità di un evento è associata alla frequenza relativa del verificarsi dell'evento stesso, su un elevato numero di prove tendenti all'infinito.***

Quindi se i casi possibili sono n e l'insieme dei casi favorevoli sono n_A ,

- per la ***teoria classica*** la probabilità che accada l'evento A sarà:

  $$p_A=\frac{n_A}{n}$$

- mentre per la ***teoria frequentista*** essa sarà:

  $$p_A=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}$$

In entrambe le definizioni si ha: $0 \le p_A \le 1$. Se tutti gli eventi sono ugualmente possibili la *definizione classica* e la *definizione frequentista* di probabilità coincidono.

Diverso l'approccio bayesiano di cui è importante rappresentante **Bruno de Finetti.** In questa teoria si introduce la speranza matematica.

3. Definizione **soggettiva o soggettivista** dovuta a De Finetti, Savage, Ramsey.

   Bruno de Finetti (Innsbruck, 13 giugno 1906 – Roma, 20 luglio 1985) è stato un matematico e statistico italiano, noto soprattutto per la formulazione della concezione soggettiva operazionale della probabilità.

   Leonard Jimmie Savage (20 novembre 1917 - 1 novembre 1971) è stato matematico e statistico. Conseguì la laurea all'Università del Michigan e successivamente lavorò all' Institute for Advanced Study a Princeton (New Jersey), all'Università di Chicago e nello Statistical Research Group della Columbia University. Il suo lavoro più noto è il libro Foundations of Statistics del 1954, nel quale sviluppò ulteriormente la teoria della probabilità soggettiva che sottostà alla teoria bayesiana e alla sua applicazione nella teoria dei giochi.

   Frank Plumpton Ramsey (Cambridge, 22 febbraio 1903 – Londra, 19 gennaio 1930) è stato un matematico, logico, statistico ed economista inglese. Diede importanti contributi nel campo della filosofia, logica matematica, probabilità ed economia. Era il fratello di Michael Ramsey, 100° Arcivescovo di Canterbury. Ramsey nacque a Cambridge, dove suo padre era presidente del Magdalene College. Frequentò il College di Winchester prima di tornare a Cambridge, dove studiò matematica al Trinity College. Conseguì il "Senior Wrangler", il massimo titolo che poteva ottenere nel corso di matematica. La straordinaria intelligenza di Ramsey impressionò molti accademici di Cambridge, egli aveva letto molto in diversi campi e si interessava a *quasi tutto*. Politicamente orientato a sinistra ed "ateo militante". Si racconta che, in un colloquio con Charles Kay Ogden, mostrò il suo interesse ad imparare il tedesco. Ogden gli diede un dizionario e una grammatica tedesca oltre ad un complicato testo di filosofia, dicendogli "Usa la grammatica e il dizionario e dimmi cosa ne pensi del testo". Circa una settimana dopo aveva non solo imparato il tedesco, ma aveva pure delle obiezioni alle teorie presentate nel testo. Approfittò delle suo nuovo conoscenze linguistiche per leggere il Tractatus Logico-Philosophicus di Ludwig Wittgenstein, scritto nel 1918.Quest'ultima lettura lo impressionò particolarmente. Ne tradusse in seguito una buona parte in inglese e pubblicò una prima recensione nella rivista di filosofia "Mind". Nel 1923 fece un breve viaggio in Austria e discusse con Wittgenstein che a quel tempo era insegnante. L'anno seguente tornò in Austria per una seduta di psicoanalisi presso Theodor Reik a Vienna e per fare un'ulteriore visita a Wittgenstein. In effetti Ramsey criticò fortemente Wittgenstein, e assieme a Piero Sraffa ne influenzò la sua filosofia successiva. Tornato in Inghilterra, in età ancora giovane (21 anni) diventa "fellow" presso il King's College e diventa Colleg's Director of Studies in Mathematics. I due teorema di esistenza, noti come teorema di Ramsey e formulati nella sua opera "On a problem of formal logic", danno il via ad altri lavori nel campo della teoria dei grafi e della combinatoria La teoria che ne segue nel campo della combinatoria viene chiamata teoria di Ramsey. Nel 1926 presentò quella che era la prima teoria moderna della probabilità. Ramsey, amico di John Maynard Keynes, pubblicò anche due importanti scritti di economia: A contribution to the theory of taxation e A mathematical theory of saving. Nel 1928 formulò la regola di Ramsey con la quale ampliò la regola aurea dell'accumulazione che aveva formulato con Edmund Phelps. Il 19 gennaio 1930 Frank Plumpton Ramsey muore a 26 anni in seguito ad una operazione.

   Essa si applica a esperimenti casuali i cui eventi elementari **non** sono ritenuti **ugualmente possibili e l'esperimento non è ripetibile più volte sotto le stesse condizioni. *La probabilità di un evento è fornita secondo l'esperienza personale e le informazioni disponibili.***

   Una tale probabilità può essere *misurata* solo *quantizzando* il grado di fiducia che la persona ripone nel successo. Definiamo quindi $p(E)=\frac{P}{S}$ dove P indica il *prezzo* che si è disposti a pagare in caso di *insuccesso* ed S la *somma* che si riceve in caso di *successo*. Vi è una unica limitazione alla libertà di scommessa: il **principio di coerenza,** secondo il quale se si è disposti a ricevere S ed a pagare P si deve anche essere disposti a ricevere P per pagare S e quindi vale ancora che $0 \le p(E) \le 1$.

Un esempio, dovuto al de Finetti, chiarisce bene la differenza tra i tre approcci.

Immaginiamo che ci sia una partita di calcio e che lo spazio dei tre eventi siano: la vittoria della squadra di casa, la vittoria della squadra ospite e il pareggio. Vediamo cosa accade con i tre approcci:

1. secondo la teoria **classica** esiste 1 probabilità su 3 che avvenga il primo evento
2. secondo la teoria **frequentista** ci si può dotare di un almanacco e controllare tutte le partite precedenti e calcolare la frequenza di un evento
3. secondo la **teoria soggettiva** ci si può documentare sullo stato di forma dei calciatori, sul terreno di gioco e così via fino ad emettere una probabilità soggettiva.

Esempi di probabilità classica

1. Lanciando un dado **non truccato** con le facce numerate da 1 a 6, quale è la probabilità che esca il numero 3 ?
   Ogni numero ha la stessa probabilità di uscita si deve usare la definizione classica di probabilità

   $$p_A = \frac{n_A}{n} = \frac{1}{6}$$

2. In un' urna vi sono 25 palline (uguali al tatto) delle quali 11 bianche e 14 nere. Quale è la probabilità che estraendo una pallina questa sia bianca?
   Si suppone che chi estrae la pallina non abbia la possibilità di dare una "sbirciatina" quindi tutti gli eventi sono ugualmente possibili si deve usare la definizione classica di probabilità.

   $$p_A = \frac{n_A}{n} = \frac{11}{25}$$

3. Quale è la probabilità di vincere un terno al Lotto?
   Si suppone che il modo con il quale si estraggono i numeri non sia truccato. Si vince un terno se tra i 5 numeri estratti sono presenti i 3 giocati. Quindi i casi possibili sono le combinazioni semplici di estrarre 5 numeri dai 90. Tra tutti i casi possibili sono favorevoli quelle cinquine che contengono i 3 numeri giocati ed altri due numeri qualsiasi, qundi i casi favorevoli sono le combinazioni semplici di 87 numeri presi 2 a 2:

   $$p_A = \frac{n_A}{n} = \frac{C_{87,2}}{C_{90,5}}$$

4. Si estraggono da un mazzo di 40 carte non truccato le 10 carte di cuori, si mescolino accuratamente e quindi si scoprano una alla volta. Quale è la probabilità che si presentino nell'ordine asso, due, tre....
   Il mazzo di carte non è truccato quindi tutti le sequenze sono ugualmente possibili. I casi possibili sono allora dati dal numero di permutazioni semplici di 10 oggetti tutti differenti e vi è un solo caso favorevole quindi

   $$p_A = \frac{n_A}{n} = \frac{1}{P_{10}} = \frac{1}{10!}$$

5. Calcolare la probabilità che, ricevendo 5 carte scelte a caso in un mazzo di 32, tra queste siano presenti 3, e soli 3, assi.
   Il mazzo di carte non è truccato quindi i casi possibili sono dati dalle possibilità di scegliere 5 carte da un totale di 32 cioè dalle combinazioni semplici di 32 oggetti di classe 5. I casi

possibili sono il prodotto dalle combinazioni semplici di 27 oggetti di classe 2 (2 sulle 27 rimanenti non assi) moltiplicato per le combinazioni semplici di 5 oggetti di classe 3 (tre assi su cinque in totale)

$$p_A = \frac{n_A}{n} = \frac{C_{27,2} \cdot C_{5,3}}{C_{32,5}}$$

Probabilità totale di un evento

Si parla di **probabilità totale** quando un evento può presentarsi in diversi modi tali che ciascuno di essi escluda tutti gli altri. Si può allora dimostrare il seguente teorema che deriva dalla teoria assiomatica della probabilità.

Teorema

*Nel caso in cui un evento può presentarsi in diversi modi possibili tutti **mutamente escludentesi** la probabilità totale che l'evento si verifichi è data dalla **somma** delle probabilità di ogni singolo modo nel quale l'evento può presentarsi*

$$p(E_{totale}) = \sum_{j=1}^{N} p(E_j) \quad \textit{dove} \quad p(E_1) \cap p(E_2) \ldots\ldots\ldots\ldots \cap p(E_N) = 0$$

Se gli eventi **non sono mutamente escludentesi** allora si deve sottrarre la probabilità che essi siano verificati contemporaneamente:

$$p(E_{totale}) = p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \wedge E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1) \cdot p(E_2)$$

Nel caso di tre tre eventi la relazione di cui sopra assume la forma:

$$p(E_{totale}) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) - p(E_1 \wedge E_2) - p(E_1 \wedge E_3) - p(E_2 \wedge E_3) + p(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3)$$

cioè:

$$p(E_{totale}) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) - p(E_1) \cdot p(E_2) - p(E_1) \cdot p(E_3) - p(E_2) \cdot p(E_3) + p(E_1) \cdot p(E_2) \cdot p(E_3)$$

Tale relazione può essere generalizzata al caso di N eventi.

Esempi di probabilità totale di un evento

1. In un urna vi sono 50 palline di cui 10 bianche 8 rosse 12 verdi e le rimanenti di altri colori. Quale è la probabilità che estraendo una palla questa sia bianca o rossa o verde?
   Si tratta di probabilità totale di un evento che può verificarsi in tre modi differenti tutti mutuamente escludentesi in quanto una pallina non può essere contemporaneamente rossa e verde o verde e bianca ....Supponiamo che l'estrazione avvenga in modo onesto allora la probabilità totale dell'evento sarà

$$p(E_{totale})=\sum_{j=1}^{3} p(E_j)=p(bianca)+p(rossa)+p(verde)=\frac{10}{50}+\frac{8}{50}+\frac{12}{50}=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$$

2. In un urna vi sono 5 palline bianche, 7 rosse, 6 verdi e 9 di altri colori tutti diversi tra loro. Quale è la probabilità che, estraendo due palline contemporaneamente, esse abbiano lo stesso colore?
   Nell' urna ci sono in tutto 27 palline. Supponiamo che l'estrazione non sia truccata, i casi possibili di estrazione di due palline su 27 sono $C_{27,2}$ *. I casi favorevoli di estrarre due palline bianche sono* $C_{5,2}$ *, quelli di estrarne due rosse sono* $C_{7,2}$ *e quelli di estrarne due verdi sono* $C_{6,2}$ *. Quindi la probabilità totale sarà*

$$p(E_{totale})=\sum_{j=1}^{3} p(E_j)=p(bianca)+p(rossa)+p(verde)=\frac{C_{5,2}}{C_{27,2}}+\frac{C_{7,2}}{C_{27,2}}+\frac{C_{6,2}}{C_{27,2}}$$

Probabilità composta di un evento

Si parla di **probabilità composta** quando un evento consiste nel verificarsi successivo o simultaneo di più eventi, l'**evento** si dice allora **composto** e la sua **probabilità composta.** Si può allora dimostrare il seguente teorema che deriva dalla teoria assiomatica della probabilità.

Teorema

*Nel caso in cui un evento sia composto la probabilità dell'evento composto è il **prodotto** dei singoli eventi componenti:*

$$p(E_{totale})= p(E_1 \wedge E_{2.} .... \wedge E_N)=\prod_{j=1}^{N} p(E_j)=p(E_1)\cdot p(E_2)\cdot .... \cdot p(E_N)$$

Esempi di probabilità composta di un evento

1. In un urna vi sono 50 palline di cui 10 bianche 8 rosse 12 verdi e le rimanenti di altri colori. Estraendo **successivamente** dall' urna due palline quale è a probabilità che escano nell'ordine una bianche ed una verde?
   *Supponiamo che l'estrazione avvenga in modo onesto e che dopo la prima estrazione la pallina **non venga rimessa nella scatola**. Si tratta di probabilità composta di due eventi indipendenti in quanto debbono verificarsi consecutivamente due eventi differenti: estrazione pallina bianca ed estrazione successiva pallina rossa quindi*:

$$p(E_{totale})=p(E_1 \wedge E_2)=\prod_{j=1}^{2} p(E_j)= p(E_1)\cdot p(E_2)=\frac{10}{50}\cdot\frac{12}{49}$$

Se dopo la prima estrazione la pallina **viene rimessa nella scatola**. *Si tratta ancora di probabilità composta di due eventi indipendenti in quanto debbono verificarsi consecutivamente due eventi differenti: estrazione pallina bianca ed estrazione successiva pallina rossa ma questa volta la probabilità totale è* :

$$p(E_{totale})=p(E_1 \wedge E_2)=\prod_{j=1}^{2} p(E_j)=p(E_1)\cdot p(E_2)=\frac{10}{50}\cdot\frac{12}{50}$$

in quanto vi è reimmissione.

2. Due urne contengono la prima 50 palline di cui 10 bianche e le rimanenti di altri colori la seconda 15 palline di cui 6 bianche e le rimanenti di altri colori..
Quale è la probabilità, prendendo una pallina da ciascuna urna ,di estrarre **simultaneamente** dalle urne due palline bianche ?
Supponiamo che l'estrazione avvenga in modo onesto. Si tratta di probabilità composta di un evento in quanto le palline vengono estratte simultaneamente quindi:

$$p(E_{totale})=p(E_1 \wedge E_2)=\prod_{j=1}^{2} p(E_j)=p(E_1)\cdot p(E_2)=\frac{10}{50}\cdot\frac{6}{15}$$

3. Da un mazzo di 40 carte non truccato si estraggono 3 carte una di seguito all' altra. Quale è la probabilità che si presentino 3 figure?
Possiamo pensare all'evento come un evento composto di 3 eventi successivi: estrazione I figura da un mazzo di 40 carte , estrazione II figura da un mazzo di 39 carte ed estrazione III figura da un mazzo di 38 carte quindi sapendo che un mazzo contiene 12 figure la probabilità totale sarà:

$$p(E_{totale})=p(E_1 \wedge E_2 \wedge E_3)=\prod_{j=1}^{3} p(E_j)=p(E_1)\cdot p(E_2)\cdot p(E_3)=\frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39}\cdot\frac{10}{38}$$

Oppure possiamo pensare all'evento come un unico evento allora i casi possibili sono $C_{40,3}$ *mentre quelli favorevoli* $C_{12,3}$ *quindi la probabilità sarà ancora:*

$$p(E_{totale})=\frac{C_{12,3}}{C_{40,3}}=\frac{12!}{9!3!}\cdot\frac{40!}{37!3!}==\frac{12}{40}\cdot\frac{11}{39}\cdot\frac{10}{38}$$

Esempi di probabilità totale e composta

1. Abbiamo 2 dadi uguali non truccati, ciascuno ha una faccia blu, due facce rosse e tre facce gialle. Quale è la probabilità che lanciandoli contemporaneamente si ottengano facce dello stesso colore?
I dadi non sono truccati. Si tratta di un evento che si deve trattare usando la probabilità composta e totale. Infatti la probabilità che escano due facce bianche è
$p(2\ facce\ blu)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$ *quella che escano due facce quindi la probabilità che escano due facce rosse è* $p(2\ facce\ rosse)=\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}$ *e quella che escano due facce gialle è*
$p(2\ facce\ gialle)=\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}$.
La probabilità totale è la somma delle tre probabilità composte:

$$p(totale)=p(blu)+p(rosse)+p(gialle)=\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

2. Una moneta è lanciata 3 volte. Determina la probabilità di ottenere tre teste sapendo che la prima volta si ottiene sicuramente testa.
Si tratta di probabilità composta di tre eventi il primo dei quali è certo mentre gli altri due hanno probabilità $\frac{1}{2}$ *. Quindi*

$$p(totale)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

3. Un urna contiene 10 dischetti rossi, 8 dischetti neri, 12 dischetti bianchi tutti delle stesse dimensioni. Determina la probabilità di ottenere nell'ordine un dischetto rosso, un dischetto nero ed un dischetto bianco se si estraggono 3 dischetti con reimmissione.
Gli eventi sono indipendenti in quanto vi è reimmissione. Si tratta quindi di probabilità composta di tre eventi :

$$p(totale)=\left(\frac{10}{30}\right)\cdot\left(\frac{8}{30}\right)\cdot\left(\frac{12}{30}\right)$$

Se non ci fosse la reimmissione la probabilità sarebbe:

$$p(totale)=\left(\frac{10}{30}\right)\cdot\left(\frac{8}{29}\right)\cdot\left(\frac{12}{28}\right) \quad .$$

4. In una popolazione animale si sa che la probabilità che un animale cha ha ora 12 anni di essere vivo tra 5 anni è del 87%, mentre tale probabilità per un animale che ha ora 20 anni scende al 62%. Si vuole determinare: a) la probabilità che entrambi gli animali siano vivi tra cinque anni, b) la probabilità che almeno uno di essi sia vivo tra cinque anni.
a) Si tratta di probabilità composta di eventi indipendenti quindi:
$p(totale)=0{,}87\cdot 0{,}62=0{,}5934$ *cioè una probabilità* $p(totale)=54\%$.
b)Si tratta di probabilità totale di eventi ***non mutuamente escludentes****i quindi:*

$$p(E_{totale})=p(E_1)+p(E_2)-p(E_1\wedge E_2)=p(E_1)+p(E_2)-p(E_1)\cdot p(E_2)$$

cioè
$p(totale)=0{,}87+0{,}62-0{,}87\cdot 0{,}62=0{,}9506$ *cioè una probabilità* $p(totale)=95\%$.

5. Su di un tavolo sono disposte due urne indistinguibili U_1 e U_2 che contengono rispettivamente 5 palline bianche e 10 nere la prima urna e 8 palline bianche e 10 nere la seconda urna. Le due urne vengono mescolate ed una persona bendata estrae da un'urna una pallina. Quale è la probabilità che la pallina sia bianca?
Gli eventi ***sono mutuamente escludentesi,*** *dobbiamo sommare due probabilità, la probabilità che venga scelta l'urna* U_1 *e che da questa venga estratta una pallina bianca più la probabilità che venga scelta l'urna* U_2 *e che da questa venga estratta 8 una pallina bianca.*
Quindi: $p(E_{totale})=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{15}+\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{18}=\frac{7}{18}$.

Distribuzione binomiale e variabili Bernoulliane

Supponiamo di fare un esperimento con appena 2 risultati possibili. Gli esempi comuni possono:

- passare/fallire un esame
- vincere/perdere al gioco
- osservare testa/croce lanciando una moneta
- includere una persona in una lista [fumatori | non fumatori]
- prendere la sufficienza o l'insufficienza nel compito di matematica

L'evento è allora descritto da una variabile (*variabile dicotomica di Bernoulli*) che può assumere solo due valori che indicheremo rispettivamente con p che corrisponde al successo, e con $\bar{p}=1-p$ che corrisponde all' insuccesso.

Allora **la probabilità che su n eventi vi sano k successi** (per esempio vogliamo sapere quale è la probabilità che lanciando un dado $n=10$ volte esca $k=3$ volte il numero 4) è data da:

$$P(n,k)=C_{n,k}\ p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

con

$$\sum_{k=0}^{n} P(n,k)=\sum_{k=0}^{n} C_{n,k}\ p^k\cdot(1-p)^{n-k}=(p+\bar{p})^n=1$$

Quest' ultima relazione, cioè la formula di Leibnitz-Newton della potenza di un binomio, afferma che la somma di tutti i casi possibili rappresenta la certezza cioè probabilità uguale ad uno.

E' un semplice esercizio verificare che su n eventi il numero medio $\bar{k}$ di successi è dato da

$$\bar{k}=np \quad .$$

Infatti, secondo la definizione di media si ha:

$$\bar{k}=\sum_{k=1}^{n} k\ P(n,k)=\sum_{k=1}^{n} k\ C_{n,k}\ p^k\cdot(1-p)^{n-k}=n\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ C_{n,k}\ p^k\cdot(1-p)^{n-k} \quad .$$

Tale relazione , ricordando la definizione di $C_{n,k}$ può essere scritta nella forma:

$$\bar{k}=n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}\ p^k\cdot(1-p)^{n-k} \quad \text{quindi, ponendo} \quad k-1=l \quad \text{si ha:}$$

$$\bar{k}=n\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1-l)!\ l!}\ p^{l+1}\cdot(1-p)^{n-1-l}=np\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1-l)!\ l!}\ p^l\cdot(1-p)^{n-1-l}$$

da cui

$$\bar{k}=np\sum_{l=0}^{n-1} C_{n-1,l}\, p^l\cdot(1-p)^{n-1-l}=np(p+1-p)=np \quad \textit{c.v.d..}$$

Questo significa che se lanciamo una moneta non truccata, per la quale la probabilità p di avere testa è $p=\frac{1}{2}$, 50 volte in media otteniamo testa 25 volte.

Determiniamo ora l' errore associato a tale media definito dalla relazione: $\sigma_k^2=\overline{k^2}-(\bar{k})^2$ e dimostriamo che

$$\sigma_k^2=np(1-p) \quad .$$

A tale scopo calcoliamo il *valore medio di* $k^2=\overline{k^2}$

$$\overline{k^2}=\sum_{k=1}^{n}k^2\,P(n,k)=\sum_{k=1}^{n}k^2\,C_{n,k}\,p^k\cdot(1-p)^{n-k}=n\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n}\,C_{n,k}\,p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

che può essere scritto nella forma:

$$\overline{k^2}=n\sum_{l=0}^{n-1}k\,\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}\,p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

ponendo $k-1=l$ si ha:

$$\overline{k^2}=np\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(l+1)(n-1)!}{(n-1-l)!(l)!}\,p^{l+1}\cdot(1-p)^{n-1-l}$$

La somma può allora essere spezzata in due parti:

$$\overline{k^2}=np\left[\sum_{l=1}^{n-1}\frac{l(n-1)!}{(n-1-l)!(l)!}\,p^l\cdot(1-p)^{n-1-l}+\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-1-l)!(l)!}\,p^l\cdot(1-p)^{n-1-l}\right]$$

il secondo termine della sommatoria è uguale ad 1 in quanto può essere scritto come: $[p+(1-p)]^n-1$ mentre il primo può essere riscritto, ponendo $n-1=j$, nella forma:

$$\overline{k^2}=np\left[\sum_{j=0}^{n-2}\frac{l(n-2)!}{(n-2-j)!\,j!}\,p^j\cdot(1-p)^{n-2-j}+1\right]=np\left[p(n-1)+1\right]=np(np-p+1)$$

da cui, tenendo conto del fatto che $\bar{k}=np$, si ha:

$$\sigma_k^2=\overline{k^2}-(\bar{k})^2=n^2p^2-np^2+np-n^2p^2=np(1-p) \quad c.v.d.$$

Quindi su n eventi il **numero medio** k di **successi** è dato da :

$$\bar{k}=np\pm\sqrt{np(1-p)}$$

mentre il **numero medio di insuccessi** è dato da :

$$\bar{k}=n(1-p)\pm\sqrt{np(1-p)} \quad .$$

In altre parole su 50 lanci di una moneta **non truccata** il numero medio di teste o di croci, è $\bar{k} = np \pm \sqrt{np(1-p)} = 50 \cdot \frac{1}{2} \pm \sqrt{25\left(1-\frac{1}{2}\right)} \sim 25 \pm 4$, ***fate la prova..........!!!!***

Esempi di probabilità di variabile binomiale

1. Determina la probabilità che in sei lanci di un dado **non** truccato esca il numero 3 quattro volte.
   Si tratta di un evento descritto da una variabile dicotomica di Bernoulli :esce il 3 non esce il 3.
   La probabilità che in ogni singolo lancio esca il numero 3 è $p=\frac{1}{6}$ *quindi la probabilità che non esca il 3 è* $\bar{p}=1-p=\frac{5}{6}$ *. La probabilità che su sei lanci esca quattro volte il 3 sarà:*

   $$P(6,4)=C_{6,4}\, p^4 \cdot (1-p)^{6-4} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^2 .$$

   E' immediato verificare che $\sum_{k=0}^{6} P(6,4)=1$ *infatti la somma contempla tutte le possibilità:*
   k=0 non mai esce il 3 su sei lanci, k=1 esce il 3 una volta su sei, k=2 esce il 3 due volte su sei k=3 esce il 3 tre volte su sei, k=4 esce il 3 quattro volte su sei, k=5 esce il 3 cinque volte su sei k=6 esce il 3 sei volte su sei. Quindi tale somma rappresenta la certezza

2. Un dado non truccato viene lanciato 7 volte . Determinare la probabilità che 5 lanci presentino un punteggio maggiore di 3.

   $n=7,\ k=5,\ p=\frac{1}{2},\ \bar{p}=\frac{1}{2}$ *quindi*

   $$P(7,5)=P(n,k)=C_{n,k}\, p^k \cdot (1-p)^{n-k}\, P(n,k)=C_{7,5}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

3. La probabilità che un giocatore ha di vincere ad un gioco è $p=\frac{2}{3}$. Quale è la probabilità di vincere **almeno** 3 volte se il giocatore gioca 6 volte?

   Si tratta di probabilità totale di una variabile di Bernoulli:

   $$P=P(5,3)+P(5,4)+P(5,5)=C_{5,3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_{5,4}\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + C_{5,5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 .$$

   *Se volessimo invece determinare quale è la probabilità di vincere **almeno una volta** dovremmo fare la somma* $P=P(5,1)+P(5,2)+P(5,3)+P(5,4)+P(5,5)$ *. In questo caso è allora molto più utile eseguire la somma osservando che nel caso generale di* n *eventi si ha:*

   $$P=\sum_{k=1}^{n} P(n,k)=\sum_{k=1}^{n} C_{n,k}\, p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k}\, p^k \cdot (1-p)^{n-k} - (1-p)^n = 1-(1-p)^n$$

   Nel nostro esempio quindi otterremmo più semplicemente:

   $$P=\sum_{k=1}^{5} P(5,k)=1-(1-p)^5=1-\left(1-\frac{2}{3}\right)^5=1-\left(\frac{1}{3}\right)^5=0.99588 .$$

Esempi di probabilità soggettiva e statistica

1. Una persona è disposta a pagare 45 euri in cambio di 120 se la squadra di calcio di cui è tifosa vincerà lo scudetto. Quale è la probabilità che questa persona *attribuisce all'evento*?

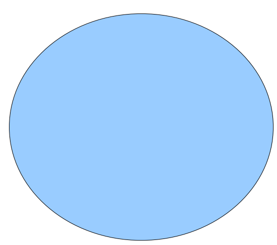
   Si applica la definizione di probabilità soggettiva:

   $$p(E)=\frac{45}{120}=\frac{3}{8}$$

2. Una industria alimentare ha distribuito un nuovo tipo di biscotti ad un campione di 2895 famiglie. Alla domanda: "comprerebbe i biscotti proposti preferendoli a tutti gli altri?" , 1976 famiglie hanno risposto affermativamente. Quale è la probabilità che ha l'azienda che il biscotto abbia successo nel mercato?

   In questo caso si deve usare la definizione statistica tenendo conto del fatto che il campione è abbastanza popoloso, essa migliorerà all'aumentare del campione. Possiamo affermare che $p(E)\sim\frac{1976}{2895}=0{,}68256$ *che corrisponde a circa il* $68{,}3\%$.

Completiamo queste note con alcuni esempi di **probabilità nel caso di variabili continue,** l'esempio paradigmatico è il **tiro a segno.** Vogliamo in altre parole rispondere al seguente quesito: supponiamo di avere un tiro a segno come quello mostrato in figura, il raggio del cerchio interno è r e quello del cerchio esterno R , se si colpisce il cerchio interno si totalizzano 100 punti mentre, se si colpisce la corona, se ne totalizzano 50. Lanciando una freccia quale è la probabilità di totalizzare esattamente 100 punti?



Si totalizzeranno esattamente 100 punti se si colpisce un punto qualsiasi della zona colorata, quindi la probabilità sarà data dal rapporto tra le due aree quella totale e quella del cerchio interno:

$$P=\frac{a}{A}=\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=\frac{r^2}{R^2} \quad .$$

Tale probabilità rimarrebbe la stessa anche nel caso che le due circonferenze fossero l'una interna all'altra ma non concentriche.

Valutiamo ora la probabilità di colpire un punto qualsiasi sul bordo della circonferenza interna o sul borda della circonferenza esterna o il centro della circonferenza interna o anche un punto specifico qualsiasi. Se il bordo viene considerato un *bordo matematico* cioè con le dimensioni di una linea tale probabilità sarà 0 in quanto la probabilità sarà sempre data dal rapporto tra l'area del bordo e l' area totale ma il *bordo matematico* ha superficie pari a zero. Per lo stesso motivo sarà zero anche la probabilità di colpire il centro o un qualsiasi altro punto particolare, se questo viene pensato come un *punto matematico*: il punto non ha dimensioni. Tuttavia è opportuno osservare che da un punto di vista pratico il bordo ha sempre uno spessore, quello della punta che lo ha tracciato, ed inoltre la punta della nostra freccia non è un punto matematico, ma la si può considerare tale rispetto alle due superfici a e A da qui la relazione di cui sopra.

Alla luce di quanto sopra esposto risolvete il seguente quesito (Maturità PNI 2008/09)
Quesito 3 Una moneta da 2 euro che ha un diametro di 25,75 mm, viene lanciata su di un pavimento di mattonelle quadrate di lato pari a 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire all'interno della mattonella, cioè non tagli i bordi della mattonella ?
Suggerimento
Affinché la moneta non tagli il bordo della mattonella è necessario che il suo centro disti r *dal bordo della mattonella............*