COINCIDENZE
in funzione della
DISTANZA
ampiezza dell'angolo solido e distanza tra i piani

Prof. Paola Giacconi

Vogliamo determinare come varia il conteggio, in coincidenza, delle tre camere al variare della distanza tra le camere stesse. A tale scopo iniziamo con il considerare il caso più semplice, ma egualmente significativo, di rivelatori le cui superfici siano dei cerchi di raggio **r**, come mostrato in ***figura1***, e **d** la distanza tra le piastre che supporremo di uno spessore trascurabile rispetto alla distanza tra le piastre stesse.

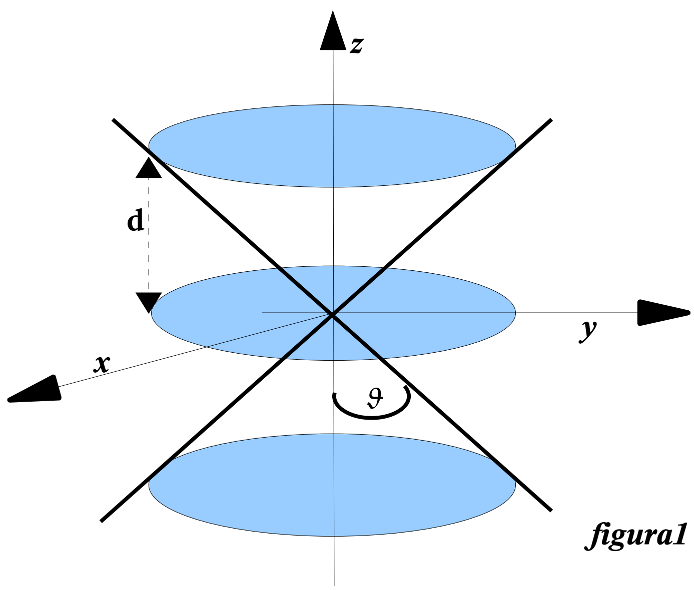

figura1

Per determinare come varia l' angolo solido Ω in funzione della distanza tra le piastre consideriamo l'elemento infinitesimo di angolo solido $d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ dal quale dopo opportune integrazioni otterremmo la funzione cercata :

$$\Omega = \Omega(d) \quad .$$

A tale scopo osserviamo che $r = d \, tg \, \vartheta$ con $\vartheta \in \left[-arctg\left(\frac{r}{d}\right), arctg\left(\frac{r}{d}\right) \right]$ mentre $\varphi \in [0 \, , \, 2\pi]$.

Integrando su ϑ e φ otteniamo:

$$\Omega(d) = \int\int \sin\vartheta \; d\vartheta \; d\varphi = 4\pi \int_0^{arctg(r/d)} \sin\vartheta \; d\vartheta = -\left[4\pi \cos\vartheta\right]_0^{arctg(r/d)} = 4\pi\left(1 - \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}}\right) \quad ,$$

da cui $\Omega(d=0) = 4\pi$ che rappresenta, come ci si aspetta l'intero angolo solido, mentre $\lim_{d\to\infty} \Omega(d=0) = 0$ di nuovo in accordo con l'intuizione.

Ora per tenere conto del fatto che le piastre del nostro rivelatore non sono dei cerchi ma dei rettangoli di lati a e b possiamo operare come segue.

Determiniamo il rapporto tra il volume del cono con base il cerchio di raggio $r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}}$ e la piramide con base il rettangolo di lati a e b (vedi ***figura 3*** a fondo pagina) e calcoliamo il fattore di scala che ci fa passare dal volume del cono a quello della piramide inscritta nel cono stesso che a noi interessa.

Come noto il volume del cono e/o il volume della piramide è dato dalla relazione $V=\frac{S_{base}\,h}{3}=\frac{S_{base}\,d}{3}$. Nel caso specifico da noi trattato si ha quindi che $\frac{V_{piramide}}{V_{cono}}=\frac{4\,ab}{\pi\,(a^2+b^2)}$ da cui otteniamo la funzione cercata che di nuovo tende a zero quando la distanza tra le piastre va all' infinito mentre si riduce ad una costante, diversa dall' intero angolo solido, quando la distanza tra le piastre tende diventa uguale a zero.

$$\Omega(d)=\frac{4\,ab}{\pi\,(a^2+b^2)}\,4\pi\left(1-\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}}\right)=\frac{16\,ab}{(a^2+b^2)}\left(1-\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}}\right)=\frac{16\,ab}{(a^2+b^2)}\left(1-\frac{2\mathrm{d}}{\sqrt{a^2+b^2+4\mathrm{d}^2}}\right)\ .$$

L'andamento di tale funzione è di seguito riportato (vedi ***figura 2***):

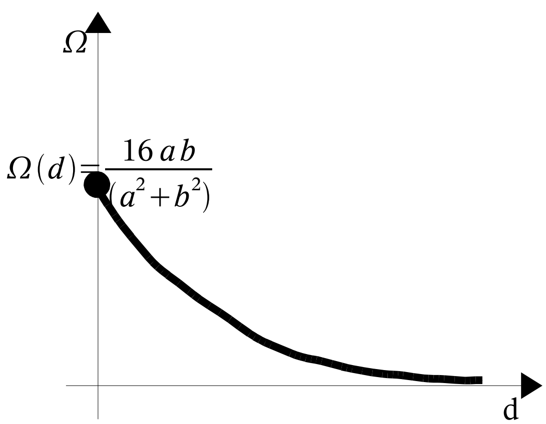

figura 2

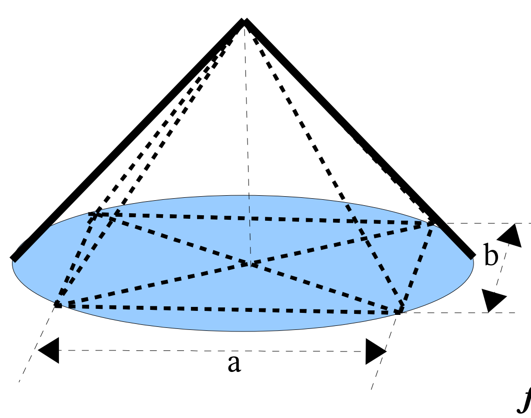

figura 3