LICEO GINNASIO LUIGI GALVANI

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

SECONDA PROVA SCRITTA

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche e/o grafiche purché non siano dotate di capacità di calcolo simbolico (O.M. n. 65_2022).
È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana.

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario

[60] PROBLEMA 1

Data la funzione:

$$y = f(x) = \sqrt[3]{ax^2 - 4x}$$

Determina:

- **a)** Determina il valore del parametro reale a in modo tale che la funzione abbia un minimo assoluto nel punto di ascissa $x = 1$.
- **b)** Dopo aver verificato che $a = 2$ studia dettagliatamente la funzione e traccia il suo grafico. Valuta se, nel suo dominio, la funzione è derivabile e studia gli eventuali punti di non derivabilità. Non è necessario lo studio della derivata seconda.
- **c)** A partire da grafico di $y = f(x)$ traccia il grafico della sua derivata $y = f'(x)$ giustificando adeguatamente.
- **d)** Stabilire se la funzione è invertibile per $x > 1$ ed eventualmente determina l'equazione della retta tangente alla funzione inversa nel punto P' di $f^{-1}(x)$ corrispondente al punto di ascissa $x = 3$ di $f(x)$.
- **e)** Determina l'area della porzione di piano compresa tra la funzione $g(x) = (x-1)f(x)$, l'asse delle ascisse da $x = 0$ a $x = 1$.

[60] PROBLEMA 2

Data la funzione

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \ln(t^2+1)\,dt$$

- **a)** Dimostrare che $y = f(t)$ è pari e da questo deduci la simmetria di $F(x)$.
- **b)** Determina l'espressione di y=$F(x)$.
- **c)** Studia dettagliatamente la funzione $y = f(x)$ e traccia il suo grafico.
- **d)** Dal grafico di $y = f(x)$ deduci e quindi traccia quello di $y = F(x)$.
- **e)** Determina la retta tangente alla funzione $y = F(x)$ nel suo punto di flesso.

QUESITO 1

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \arctan t \, dt}{x^2}$$

ed enunciare il teorema utilizzato.

QUESITO 2

Nella regione finita di piano delimitata dalla curva $y = x^2 - 9$ inscrivere il rettangolo di area massima avente i lati paralleli agli assi cartesiani.

QUESITO 3

Enuncia il teorema di Rolle.

Data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + ax & \text{se} \quad -1 \le x \le 3 \\ bx - c & \text{se} \quad 3 < x \le 5 \end{cases}$$

Determina a, b e c in modo tale che la funzione verifichi il teorema di Rolle nell'intervallo $[-1; 5]$ e determinare il punto x_0 in cui si verifica la tesi.

QUESITO 4

Enuncia il teorema della media, spiegane il significato geometrico e determina il valore medio della funzione:

$$f(x) = \sin^2 x$$

nell'intervallo $I = [0; \pi]$.

QUESITO 5

Valuta se la funzione

$$y = f(x) = \frac{1}{2 + e^{\frac{1}{1+x}}}$$

presenta un punto di singolarità, eventualmente, dopo averlo individuato si richiede di classificarlo.

QUESITO 6

Dopo aver dato la definizione di asintoto orizzontale, obliquo e verticale stabilire se tra le seguenti funzioni qualcuna presenta un asintoto obliquo:

$$\boldsymbol{a})\ f(x) = x + \operatorname{tg} x; \qquad \boldsymbol{b})\ f(x) = \frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 1}; \qquad \boldsymbol{c})\ f(x) = \frac{\sqrt{4x^4 + 1}}{2x}$$

Determinare l'equazione dell'eventuale asintoto obliquo della funzione.

QUESITO 7

Calcola l'area della porzione di piano compresa tra la funzione $y = x^2\, e^{-x}$ e l'asse delle ascisse per $x \geq 0$.

QUESITO 8

Fornisci la definizione di Integrale definito e determina:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$$